Facharbeit Mathematik
2005 / 2006

Summendarstellung und Untersuchung des Verhaltens von Teilern natürlicher Zahlen

von Daniel Mewes

Theodor-Fliedner-Gymnasium Düsseldorf
Kurs: LK Mathematik 12, Barten-Windt

Inhalt

1. Einleitung
2. Hauptteil
    1. Von der Definition zur Summen
        1. Formale Primzahldefinition
        2. Herleitung einer Summendarstellung
        3. Experiment: Histogramm sowie Verlauf über die Anzahl der Teiler natürlicher Zahlen
    2. Häufigkeitsverteilung von Zahlen mit bestimmter Teileranzahl
        1. Logarithmischer Primzahlsatz
        2. Rekursive Häufigkeitsberechnung über ein Intervall
        3. Experiment: Wie verhalten sich die Häufigkeiten verschiedener Teileranzahlen
3. Ausblick

1. Einleitung

„Die Zahlentheorie beschäftigt sich mit den Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen, wobei besonderes Interesse den Primzahlen zukommt [...]“[1]. Durch diese Beschreibung wird bereits deutlich, dass die Teilbarkeit von Zahlen und dementsprechend auch das Verhalten der Teiler einer Zahl in der Mathematik eine große Rolle spielt, widmet man deren Untersuchung doch ein vollständiges Teilgebiet der theoretischen Mathematik. Dabei kann man die Zahlentheorie sicherlich als ein grundlegendes Feld der Mathematik bezeichnen, denn schließlich beschäftigt sie sich mit der Basis, auf die die heutige und stärker noch die klassische Mathematik aufbaut, nämlich den Zahlen ansich. Zugleich aber dürfte es kaum ein anderes Gebiet der Mathematik geben, das derart viele für lange Zeit oder gar bis heute ungelöste mathematische Probleme hervorgebracht hat.

Systematisch schrieb erstmals Euklid gegen 300 vor Christus Grundlagen der Zahlentheorie in seinem Werk „Elemente“ nieder. Dabei beschäftigte er sich sowohl mit der Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers, als auch mit Primzahlen und bewies dabei, dass von diesen unendlich viele existieren müssen. Zu den historisch bedeutensten Mathematikern, die sich mit der Zahlentheorie befassten, gehört sicherlich auch Pierre de Fermat (1601-1665), dessen berühmte Vermutung über die unlösbarkeit der Gleichung $x^n+y^n=z^n$ für $n\geq 3$ erst 1995, also nach mehr als 350 Jahren bewiesen werden konnte. Auf den neuzeitliche Mathematiker Bernhard Riemann (1826-1866) geht die nach diesem benannte Riemannsche Vermutung zurück, die ebenfalls der Zahlentheorie zuzuordnen ist und bis heute unbewiesen ist.[2]

Heute spielt die Zahlentheorie in der praktischen Kryptographie eine zentrale Rolle, da hier die Vermutung ausgenutzt wird, dass eine Zerlegung einer ganzen Zahl in ihre Primfaktoren, also in ein Produkt von nicht weiter teilbaren Zahlen, nicht ohne großen Rechenaufwand realisierbar ist. Ein mathematischer Beweis für die Sicherheit dieser Verfahren ist bislang nicht gelungen. Dieser praktische Zweig der ursprünglich

1 Quelle: Harald Scheid: Zahlentheorie; 3. Auflage 2003 Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg; Seite 9

2 Historische Daten aus Harald Scheid „Zahlentheorie“ Seiten 9-11 und Wikipedia, der freien Enzyklopädie „Zahlentheorie“ vom 04.03.06

theoretischen Zahlentheorie wird allerdings mit der Realisierbarkeit komplexer Quantencomputer wieder ein schnelles Ende finden.

Allgemein ist feststellbar, dass gerade im Bereich der Primzahlen kaum mathematische Gesetze aufstellbar sind, die eine schnelle Berechnung ihrer Eigenschaften ermöglichen. So existiert für Primzahlen keine Bildungsvorschrift und für die Berechnung der Anzahl von Primzahlen in einem bestimmten Intervall natürlicher Zahlen behilft man sich in der Regel mit Annäherungen. Zwar lassen sich häufig diverse Regelmäßigkeiten zum Beispiel in der Verteilung von Primzahlen feststellen, die jedoch selten allgemein gültig oder exakt auf eine bestimmte Zahl n angewendet werden können. Ein Beispiel derartiger Regelmäßigkeiten sind die so genannten Cunningham-Ketten[3]. Diese Ketten basieren auf der Beobachtung, dass in einigen Fällen bei der Existenz einer Primzahl a, die Zahl 2a+1 ebenfalls eine Primzahl ist. Nun gibt es Zahlen, für die dies auch für die so neu gebildete Primzahl zutrifft. Eine Folge derartiger Primzahlen bezeichnet man als Cunningham-Kette. Bislang konnten Cunningham-Ketten aus mindestens 13 Primzahlen gefunden werden.

Ist allerdings eine Rechenregel erwünscht, die für eine spezifische Zahl eine zwangsläufig korrekte Aussage über deren Teilbarkeitseigenschaften erlaubt, sind aufgrund der auftretenden Abhängigkeiten der Zahlen untereinander rekursive Terme häufig die einzige Alternative. In meiner Arbeit werde ich dazu Summen verwenden und dann anhand der durch diese berechneten Werte teils statistische Betrachtungen durchführen. Dabei werde ich zunächst von den bereits sehr stark untersuchten Primzahlen - also Zahlen mit genau zwei Teilern - ausgehen und dann auch Zahlen mit einer größeren Anzahl von Teilern betrachten.

3 Vergleiche Günter Löh: Wie Perlen auf der Schnur

2. Hauptteil

2.1 Von der Definition zur Summe

2.1.1 Formale Primzahldefinition

Eine Primzahl definiert sich folgendermaßen: Eine natürliche Zahl ist genau dann eine Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat.

Die beiden Teiler einer Primzahl sind dabei stets die Eins und die Zahl selber. Diese Tatsache allein ist jedoch für eine eindeutige Definition von Primzahlen nicht ausreichend. Folgt man der Definition „Eine natürliche Zahl ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und die Eins teilbar ist", so wäre die Eins selbst eine Primzahl, da beide Bedingungen erfüllt wären. Diese häufig verwendete Definition ist somit unzureichend, denn die Eins wird gemeinhin nicht als Primzahl angesehen. Tatsächlich hat die Eins nicht genau zwei, sondern nur einen Teiler, nämlich sich selbst.

Ein möglicher Ausdruck der Aussagenlogik, der genau für Primzahlen zutrifft, lautet somit: $n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N} \setminus \{1; n\} : n \bmod t > 0$. Es muss also für alle natürlichen Zahlen t zu einer natürlichen Zahl n der Rest (Modulo) der Ganzzahldivision $\frac{n}{t}$ größer (ungleich) Null sein, damit n eine Primzahl ist.

Diese auf Primzahlen bezogenen Aussagen lassen sich verallgemeinern. Analog zu den Primzahlen kann man eine Menge an Zahlen ermitteln, die nicht genau zwei, sondern T natürliche Teiler haben. In diesem Fall gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, dass die Summe aller $t \in \mathbb{N}$, die n teilen T ist.

2.1.2 Herleitung einer Summendarstellung

Es wäre nun schön, eine einfache Gleichung zu haben, mit der man direkt ausrechnen kann, ob eine bestimmte natürliche Zahl n genau T Teiler hat beziehungsweise eine Primzahl ist. Solch eine Gleichung möchte ich im Folgenden herleiten.

Gehen wir zunächst einmal zurück zur Definition des vorherigen Kapitels. Ich hatte dort den Ausdruck $n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N} \setminus \{1; n\} : n \bmod t > 0$ für eine Primzahl n festgelegt. So muss also für alle $t \in \mathbb{N} \setminus \{1; n\}$ $n \bmod t > 0$ gelten.

Zunächst einmal bietet es sich an, den Bereich von t weiter einzuschränken, so dass wir eine endliche Menge erhalten. Dies fällt in diesem Fall leicht, denn $t \in \mathbb{N} \wedge n \bmod t > 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{N}^{\leq n} \wedge n \bmod t > 0$. Diese Äquivalenz erschließt sich aus der Tatsache, dass der Rest einer Division $\frac{n}{t}$ für zwei natürliche Zahlen n und t mit $t > n$ immer gleich n und somit auch größer als Null ist. Da die Zahl n aus der Definitionsmenge für t bereits ausgeschlossen ist, können wir die abschließende Definitionsmenge für t mit $t \in \mathbb{N}^{<n} \setminus \{1\}$ festlegen.

Tatsächlich können wir die Definitionsmenge, für die der Rest der Division Null erreichen kann sogar auf $t \in \mathbb{N}^{\leq \frac{n}{2}} \setminus \{1\}$ einschränken. Diese zusätzliche Optimierung sei im Folgenden aber außer Acht gelassen, da sie die Komplexität der Gleichungen und Funktionen erhöht und in der Sache nichts ändert. Entscheidend ist, dass der Definitionsbereich eine endliche Menge an Zahlen umfasst.

Mit Hilfe dieses eingeschränkten Definitionsbereichs können wir nun eine Summengleichung aufstellen. Zunächst einmal ergibt sich folgende Summe: $\sum_{t=2}^{n-1} n \bmod t$. Das Problem mit dieser Summe ist jedoch, dass sich nicht problemlos erkennen lässt, ob für einen der „getesteten“ Werte t der Rest Null ergibt. Eine einfache Lösung dieses Problems stellt die Signumfunktion zur Feststellung des Vorzeichens einer Zahl dar. Diese definiert sich im Raum der natürlichen Zahlen und Null so, dass $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(x) = 1$ für $x > 0$ ist.

Die Signumfunktion lässt sich nun in die eben aufgestellte Summe einsetzen und so kommen wir zu der gesuchten Gleichung. Es gilt somit: Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn $\sum_{t=2}^{n-1} \sigma(n \bmod t) = n-2$ wahr ist (Anmerkung: Für die Zahlen Eins und Zwei ist diese Gleichung nicht definiert).

Nun kann es nützlich sein, eine art Primzahltestfunktion T(n) zu haben, die dann Eins ergibt, wenn n eine Primzahl ist und andernfalls den Wert Null einnimmt. Diese Funktion lässt sich wie folgt beschreiben: T(n) ist genau dann Eins, wenn kein Term $n \bmod t$ für alle t von Zwei bis n-1 Null ergibt.

Natürlich ließe sich die Funktion T leicht als eine Funktion mit Fallunterscheidung notieren, wodurch aber wenig gewonnen wäre. Ich möchte dagegen an dieser Stelle gerne die „equality“ Funktion E einführen, die sich deutlich allgemeiner verwenden lässt und sich gut zur Lösung dieses Problems eignet. Ich definiere also die Funktion E zweier rationaler Zahlen x und y so, dass E für $x = y$ den Wert Eins und für $x \neq y$ den Wert Null liefert.

Mit dieser Hilfsfunktion lässt sich die eben formulierte Beschreibung der Funktion T nun leicht in eine mathematische Funktionsgleichung umsetzen. Es ergibt sich: $T(n) = 1 - \sigma[\sum_{t=2}^{n-1} E(n \bmod t, 0)]$. Schließlich wird der Term $\sigma[\sum_{t=2}^{n-1} E(n \bmod t, 0)]$ Eins, sobald für einen Wert von t $n \bmod t = 0$ erfüllt ist. Ergibt dieser Term Eins, wird der Funktionswert von T Null. Ergibt der Term dagegen Null, sind also keine Teiler von n im geprüften Intervall vorhanden, so ist der Funktionswert von T Eins.

Weiterhin interessant für bestimmte Probleme kann auch eine Vorstufe dieser Funktion sein. So lässt sich die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n mit der Summe $\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, 0)$ ausdrücken. An dieser Stelle kommt auch die verallgemeinerte Bedingung für Zahlen mit T anstatt zweier Teiler wieder ins Spiel. Eine Zahl hat genau dann T Teiler, wenn $\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, 0) = T$ gilt.

Mit einer statistischen Anwendung dieser Summe befasst sich das folgende Kapitel.

2.1.3 Experiment: Histogramm sowie Verlauf über die Anzahl der Teiler natürlicher Zahlen

Fragestellung / Durchführung: Im Folgenden werde ich für alle natürlichen Zahlen im Intervall [1;10000] mit dem im vorherigen Kapitel hergeleiteten Term die Anzahl der Teiler berechnen lassen. Eine Darstellung werde ich einmal als Histogramm und einmal als Verlaufsgraph durchführen. Im Histogramm werde ich einem bestimmten Bereich von Anzahlen von Teilern die Anzahl der natürlichen Zahlen zuordnen, die eine Teilerzahl aus diesem Bereich haben. Der Verlaufsgraph wird die natürliche Zahl auf der x-Achse und die zugehörige Anzahl an Teilern auf der y-Achse haben. So lässt sich feststellen, ob die Teileranzahl einer bestimmten Systematik in Bezug auf die Größe der natürlichen Zahl folgt.

Ich vermute eine solche Systematik alleine schon deshalb, weil jede Zahl n mit einem Teiler t auch alle Teiler von t als Teiler hat und die Anzahl der Teiler mit größerem n so systematisch ansteigen sollte. Ich vermute ferner, dass dadurch, dass bei größeren Zahlen n eine höhere Teileranzahl T möglich ist, die Häufigkeit kleinerer Teileranzahlen mit größerem n abnimmt. Diesen Zusammenhang werde ich in Kapitel 2.2.3 noch einmal genauer untersuchen.

Die Berechnung führe ich mir einem in der Programmiersprache C++ selbst geschriebenen Programm durch (siehe Anhang „teilerzahl.cpp“). Die Ergebnisse kopiere ich anschließend in eine Tabellenkalkulation, in der ich dann die Graphen erzeugen lasse.

Ergebnisse:

Als erstes Ergebnis betrachte ich das Histogramm über die Anzahl der Zahlen n im Intervall [1;10000] mit einer Teileranzahl T von 2, 3, 4, 5, ..., 12 (Illustration 1).

Verschiedene Beobachtungen lassen sich anhand dieses Histogramms machen. So ist es

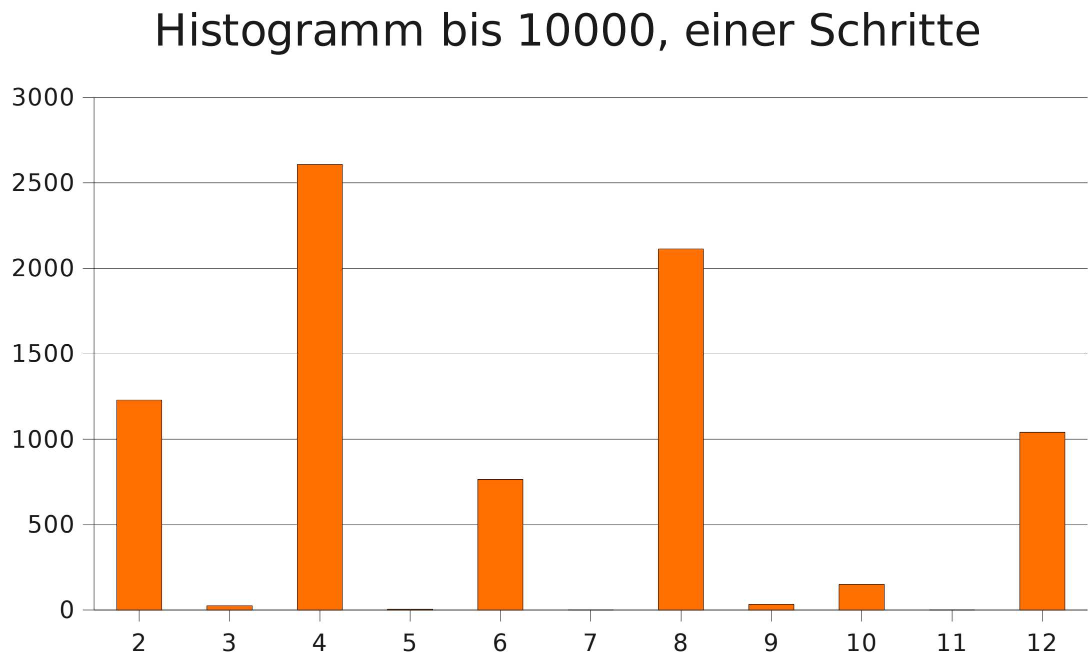

Illustration 1Histogramm über die Größe der Menge von natürlichen Zahlen mit T Teilern

auf den ersten Blick auffällig, dass bestimmte Teileranzahlen mit drastisch erhöhter Häufigkeit vorkommen als andere. Dabei handelt es sich um die 2, 4, 6, 8, 10 und 12. Dies sind durchgehend gerade Zahlen. Allerdings haben in diesem Intervall die meisten Zahlen n genau vier Teiler, sehr viele auch genau acht Teiler. Zahlen mit zwei Teilern (Primzahlen) und Zahlen mit zwölf Teilern kommen ebenfalls häufig vor, Zahlen mit sechs und insbesondere zehn Teilern dagegen kaum. Ein Vergleich mit Teileranzahlen größer zwölf belegt, dass die Teileranzahl Vier im untersuchten Intervall für n am häufigsten vorkommt.

Das zweite Ergebnis, das interessante Beobachtungen zulässt, ist ein Verlaufsgraph im weiter eingeschränkten Intervall [1;100] für n mit der Zahl n auf der x- und der Anzahl der Teiler T auf der y-Achse (Illustration 2).

Bei einer Betrachtung der lokalen Maximalwerte auf der y-Achse, ist eine annäherend logarithmische Kurvenform erkennbar. Mit dem grafischen Taschenrechner lässt sich eine zugehörige Kurvengleichung $y=2{,}9*\ln(x)-1$ ermitteln, wobei den genauen Zahlenwerten in diesem verkleinerten Betrachtungsbereich sicherlich keine große Zuverlässigkeit zugeschrieben werden darf. So ergibt sich bei Herausnahme des letzten

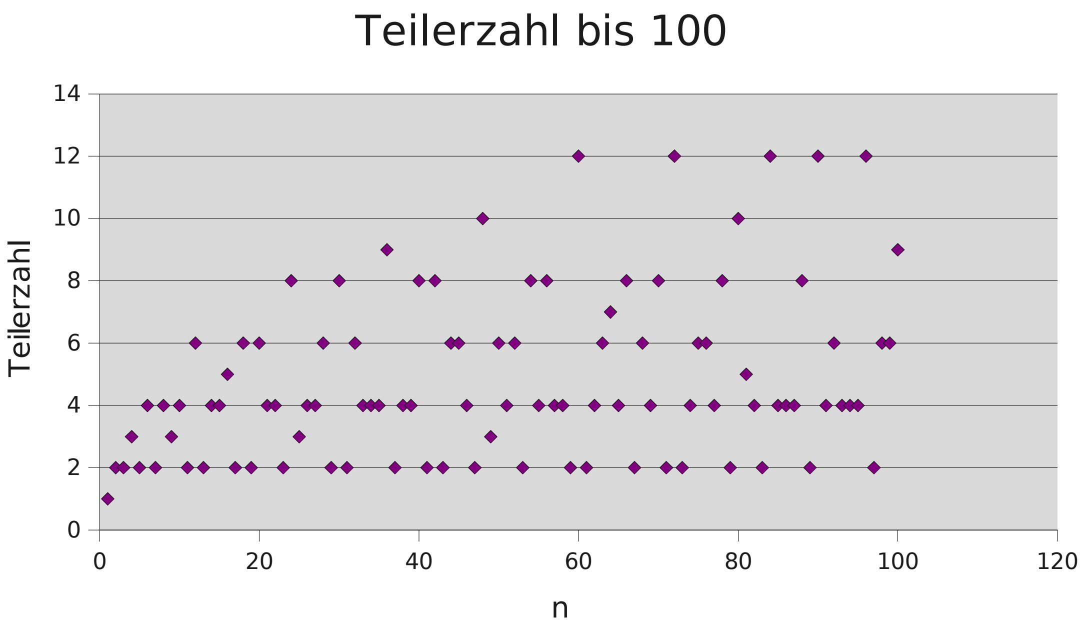

Illustration 2Verlauf der Teileranzahl im Intervall [1;100]

Maximalwertes (60|12), der recht stark von der übrigen Kurvenform abweicht, bereits eine Annäherungskurve mit $y=2,6*\ln(x)-0,4$.

Des weiteren fallen spezifische Intervalle zwischen zwei Zahlen mit einer bestimmten Anzahl an Teilern auf. Vermutlich bei allen Teileranzahlen, zumindest aber bei T gelcih 2,3,6 und 8, scheinen zwei Zahlen mit dieser Teileranzahl gehäuft in der Paarung n und n+2 aufzutauchen. Besonders bei Zahlen mit vier Teilern, aber auch bei Zahlen mit sechs Teilern lässt sich eine ähnliche Häufung mit dem Muster n und n+1 beobachten.

Zuletzt habe ich noch eine Verlaufsgraphik der Teileranzahl über das gesamte untersuchte Intervall angelegt (Illustration 3).

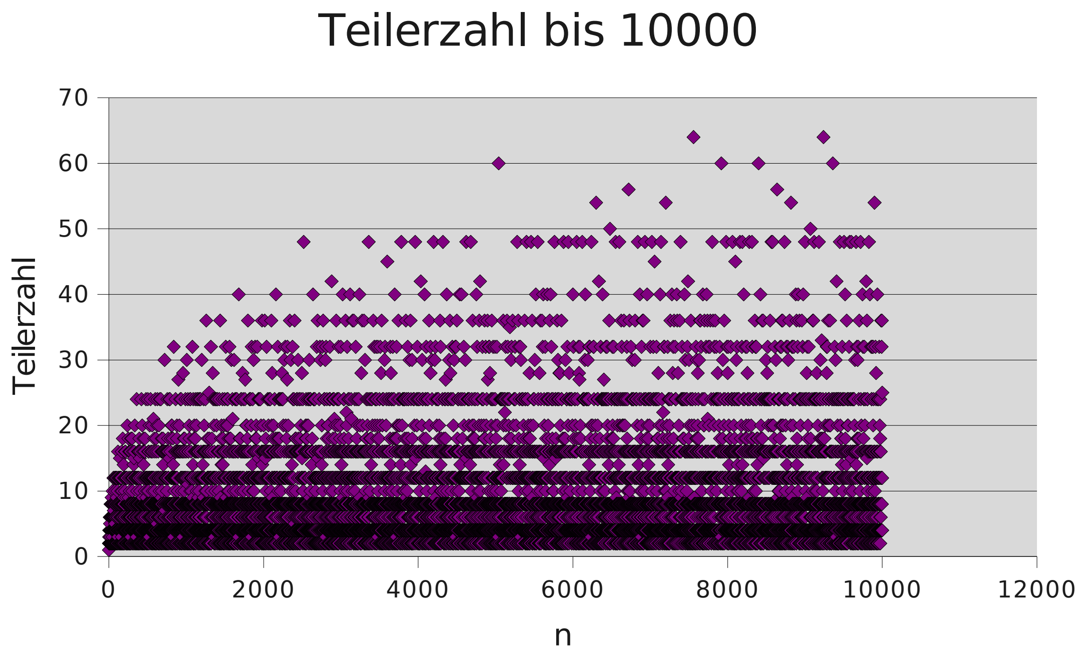

Illustration 3Verlauf der Teileranzahl im Intervall [1;10000]

Auch wenn sich bei einer derart großen Datenmenge kaum noch spezifische Beobachtungen durchführen lassen, kann in diesem größeren Intervall der annäherend logarithmische Verlauf der Maximalwerte sowie die Häufung bei der Teileranzahl Vier und Acht bestätigt werden. Bei den Teileranzahlen Zehn und Drei sind außerdem eine abnehmende Häufigkeit von Zahlen mit der jeweiligen Teileranzahl bei größerem n sichtbar, was weniger deutlich auch bei den Teileranzahlen 2 und 12 zu erkennen ist.

<u>Deutung / Erklärung:</u>

Die beobachtete Häufung gerader Teileranzahlen ist leicht zu erklären. Gehen wir von einer natürlichen Zahl n mit einem ganzzahligen Teiler d aus, der n ohne Rest teilt. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{N} : a = \frac{n}{d}$. Daraus folgt aber auch, dass a n teilt, denn es ist genau $n = a * d$. So lassen sich für die Zahl n mehrere Teilerpaare $(d, \frac{n}{d})$ bestimmen. Dabei unterscheiden sich die Werte von d und n/d in allen Fällen, außer es ist $d^2 = n$, n also eine Quadratzahl. In diesem Fall gibt es ein Teilerpaar $(d, \frac{n}{d})$ mit $d = \frac{n}{d}$, das in der Zählung der Teiler einer Zahl also nur einfach auftaucht. So ergeben sich ungerade Teileranzahlen. Alle nicht-Quadratzahlen haben eine gerade Anzahl an Teilern[4]. die Häufigkeit von Quadratzahlen nimmt zudem mit größerem n schnell ab, denn es ist die Anzahl an Quadratzahlen Q im Intervall [1;n] $Q=\sqrt{n}$ abgerundet. Dies erklärt die besonders schnelle Abnahme von Zahlen mit drei Teilern, die in der Verlaufsgraphik im Intervall [1;10000] zu beobachten war.

Dadurch nicht erklärt wird aber, weshalb zum Beispiel die Teileranzahlen Vier, Acht und Zwei deutlich häufiger vorkommen als die Teileranzahlen Sechs und Zehn.

Die offensichtliche Sonderstellung der Teileranzahl Vier habe ich noch etwas tiefergehend betrachtet. So lassen sich für die Zahlen mit genau vier Teilern einige Eigenschaften allgemein formulieren. Es muss bei vier Teilern genau ein nicht triviales Paar Teiler d und $\frac{n}{d}$ für die Zahl n geben. Die Teiler d und $\frac{n}{d}$ selbst sind dabei nicht weiter teilbar (ausgenommen durch sich selbst und Eins), denn sonst hätte auch n weitere Teiler. Es handelt sich dabei also um Primzahlen. Einzige Ausnahme: Es ist $n=d^3$, wobei sich dann die nicht-trivialen Teiler d^2 und d ergeben. Sehen wir von dieser Ausnahme ab, so folgt, dass sich Zahlen mit vier Teilern in genau zwei voneinander unterschiedliche Primzahlen faktorisieren lassen. Solch eine Zahl n ist folglich das Produkt zweier Primzahlen. Käme eine der beiden Primzahlen als Faktor häufiger als einmal vor, hätte n auch die Potenz dieser Primzahl als Teiler. Offenbar sind auf diese Art bildbare natürliche Zahlen besonders häufig. Auch über die Häufigkeit von Zahlen mit vier Teilern im Vergleich zu Primzahlen lässt sich insofern eine Aussage machen, als dass zu jeder Zahl $p_1 \in |P^{>2}$ mit der Menge der Primzahlen | P auch weitere Zahlen in der Form $p_1 * p_2$ mit $p_2 \in |P^{<p_1}$ existieren, die eben genau vier Teiler besitzen. Es ist dabei die Anzahl an Zahlen mit vier Teilern im Intervall $[1;x]$ für jede einzelne Primzahl $p_1 \leq \sqrt{x}$ $\pi(p_1)-1$ mit der π -Funktion, die die Anzahl von Primzahlen bis zu einer bestimmten Obergrenze angibt. Eine asymptotische Betrachtung der Verhaltens der daraus resultierenden Summe für die Anzahl an Zahlen mit vier Teilern im Vergleich zum Verhalten von der Anzahl der

4 Vergleiche für diese Zusammenhänge Harald Scheid „Zahlentheorie“ Seite 15

Primzahlen könnte eine Erklärung des relativ häufigerem Auftretens dieser Zahlen liefern, würde allerdings den Umfang dieser Facharbeit sprengen.

2.2 Häufigkeitsverteilung von Zahlen mit bestimmter Teileranzahl

2.2.1 Logarithmischer Primzahlsatz

Für die Berechnung von Primzahlen verwendet man häufig das Sieb des Eratosthenes. Hierbei beginnt man mit einer Liste von aufeinander folgenden natürlichen Zahlen beginnend mit der Zwei. Man wählt dann die erste nicht gestrichene Zahl aus und streicht alle Zahlen, die ein vielfaches dieser Zahl sind. Dies wiederholt man, bis keine weiteren Zahlen mehr streichbar sind. Die dann noch nicht gestrichenen Zahlen sind Primzahlen.

Aus diesem Vorgehen lässt sich für die Anzahl der Primzahlen π im Intervall [1;N] die rekursive Berechnungsvorschrift $\pi(N)=\pi(\sqrt{N})+N-1-|A|$ festlegen, wobei $|A|$ die Größe der Menge aller Primzahlen $\leq\sqrt{N}$ und aller im Sieb des Eratosthenes gestrichenen Zahlen darstellt[5]. Hieraus lässt sich wie in der angegebenen Quelle weiterhin beschrieben die Annäherung $\pi(N)=\frac{N}{\ln N}$ formen. Diese Vereinfachung wird allgemein als „Primzahlsatz" bezeichnet. Die Herleitung hierzu schien mir kompliziert und ich habe aus diesem Grund auf eine genaue Betrachtung der mathematischen Vorgehensweise verzichtet.

Der Primzahlsatz erlaubt zwar eine recht genaue Berechnung von π , lässt sich jedoch nicht ohne weiteres auf Zahlen mit weiteren Teilern bestimmter Anzahl übertragen, da bereits das zugrunde liegende Sieb des Eratosthenes die Tatsache ausnutzt, dass eine Primzahl durch keine der kleineren Primzahlen teilbar ist. Aus diesem Grund werde ich im Folgenden basierend auf der Summenformel aus Kapitel 2 eine allgemeiner gültige Funktion P für die Anzahl von Zahlen mit einer bestimmten Teileranzahl herleiten.

5 laut Harald Scheid „Zahlentheorie" Seite 19

2.2.2 Rekursive Häufigkeitsberechnung über ein Intervall

In Kapitel 2.1.2 hatte ich für die Prüfung, ob eine bestimmte natürliche Zahl n eine bestimmte Anzahl an voneinander unterschiedlichen Teilern T hat die Gleichung $\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, 0) = T$ gebildet, die in genau diesem Fall wahr ist. Folglich ist, unter Verwendung der ebenfalls in Kapitel 2.1.2 definierten Gleichheitsfunktion E, $E[\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, 0), T]$ eins, wenn die Zahl n T Teiler hat und 0, wenn sie eine von T abweichende Anzahl von Teilern hat.

Legen wir nun ein Intervall [a;b] fest, für das wir die Anzahl von Zahlen mit einer bestimmten Teileranzahl erhalten möchten. Zunächst einmal ist die Anzahl solcher Zahlen in diesem Intervall gleich $P(b) - P(a)$ für $a, b \in \mathbb{N} \wedge b \geq a$ (andere Fälle sind für meine Betrachtungen uninteressant, weshalb ich sie hier ausschließe), wobei die Funktion P einem Intervall [1;n] mit $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl von natürlichen Zahlen mit einer bestimmten Teileranzahl zuordnet. Diese Funktion P lässt sich nun anhand der so eben ermittelten Prüffunktion direkt rekursiv umsetzen. Es ist dann $P(n) = P(n-1) + E[\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, 0), T]$. Diese Funktion bewirkt eine einfache Aufsummierung aller Zahlen mit T Teilern. Möchten wir nur die Anzahl in einem Intervall [a;b] bestimmen, so lässt sich auch die vereinfachte Form $P(a, b) = \sum_{n=a}^{b} E[\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, 0), T]$ verwenden, die unmittelbar aus dem Term $P(b) - P(a)$ für die ursprüngliche P-Funktion gebildet werden kann.

2.2.3 Experiment: Wie verhalten sich die Häufigkeiten verschiedener Teileranzahlen

<u>Fragestellung / Durchführung:</u> Unter Anwendung der soeben hergeleiteten P-Funktion habe ich mir Hilfe eines kleinen C++ Programms (siehe Anhang) für das Intervall [1;100000] für verschiedene n die Anzahl der Zahlen berechnet, die in [1;n] eine

bestimmte Anzahl von Teilern T haben. Da ich für höhere T keine weiteren Erkenntnisse erwarte, habe ich mich auf den Bereich T=2 bis T=8 beschränkt. Die angewendete Funktion entspricht somit $P(n)=P(n-1)+E[\sum_{t=1}^{n} E(n \bmod t, \cdot),T]$.

Für die Visualisierung der Ergebnisse griff ich erneut auf eine Tabellenkalkulation zurück und erstellte so eine XY-Graphik.

Eine geringere Zunahme der Anzahl von Zahlen mit einer bestimmten Teileranzahl für ein größeres Intervall würde in diesem Graphen durch eine abnehmende Steigung der Kurven sichtbar. Dieser bereits in Kapitel 2.1.3 vermutete Verlauf sollte sich also anhand des Graphen überprüfen lassen. Die Graphen für ungerade T werden vorraussichtlich, wie zuvor bereits sichtbar und erklärt, ihre Steigung rapide verringern und an Null annäheren.

Ergebnisse: Über den gesamten untersuchten Zahlenraum ergibt sich der nachfolgende Graph (Illustration 4).

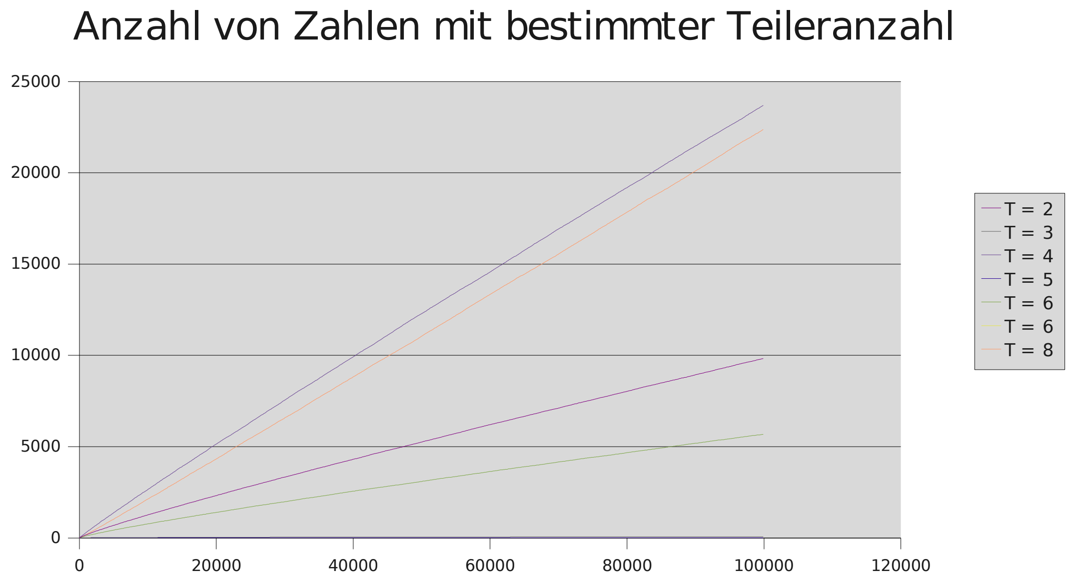

Illustration 4Anzahl von Zahlen bestimmter Teileranzahl in [1;100000]

Auf den ersten Blick scheinen alle Kurven in diesem Graphen einen nahezu linearen Verlauf aufzuweisen. Wie zu erwarten war liegen die Anzahlen von Zahlen mit ungerader Teileranzahl derart niedrig, dass sie in diesem Wertebereich kaum noch sichtbar sind. Einzig die Kurve für T=3 ist noch andeutungsweise zu erkennen.

Dass es sich beim Verlauf nicht um eine komplette Gerade handelt, wird bei einer Einschränkung des dargestellten Intervalls deutlicher. Illustration 5 zeigt einen ähnlichen Graphen für das Intervall [1;900].

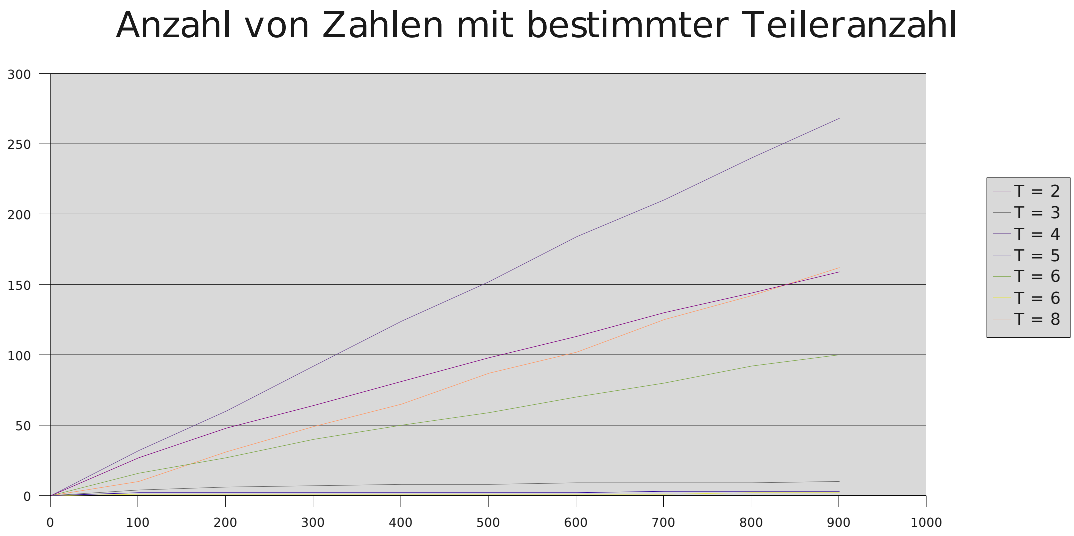

Illustration 5Anzahl von Zahlen bestimmter Teileranzahl im eingeschränkten Intervall

Auffällig ist hier besonders die Teileranzahl Acht, der zunächst nur wenige Zahlen angehören, die dann aber die Teileranzahl Sechs und später auch Fünf übertrifft. Ansonsten ist bei allen Teileranzahlen nun eine geringfügige Abschwächung der Steigung mit größerem Intervall erkennbar. Die nun besser sichtbare Kurve für T=3 wächst kaum. Ob die Steigung tatsächlich gegen Null läuft, ist allerdings nicht klar erkennbar.

<u>Deutung / Erklärung:</u> Ich möchte zunächst einmal auf den groben Verlauf zurückkommen, den ich als nahezu linear beschrieben hatte. Tatsächlich läuft auch der Primzahlsatz $\pi(N)=\frac{N}{\ln N}$ für große N auf eine nahezu lineare Form heraus, die auf Grund der Eigenschaften des Logarithmus allerdings nie ganz erreicht wird. Bemerkenswert ist hierbei aber, dass auch der Verlauf für Teileranzahlen größer Null

dem Verlauf der Primzahlen ähnlich ist und sich von diesem möglicherweise nur durch einen einfachen Faktor unterscheidet. Der „Primzahlsatz“ scheint also nicht nur für Primzahlen zu gelten, sondern auch auf andere Anzahlen von Teilern zuzutreffen. Probeweise habe ich für die Teileranzahlen T=2, T=4 und T=6 eine Funktion für eine Annäherungskurve in dieser Form ermittelt. Dazu zog ich die Daten im eingeschränkten Intervall [1;900] heran und nahm durch Ausprobieren eine Anpassung des Primzahlsatzes vor. Ich kam dabei auf folgende Ergebnisse:

Für T=2 $y=1{,}2\frac{x}{\ln(x)}$

Für T=4 $y=\frac{2\text{x}}{\ln(x)}$ oder $y=0{,}31\,x$

Für T=6 $y=0{,}8\frac{x}{\ln(x)}$

Für Primzahlen gilt der Primzahlsatz ohne Anpassung offenbar nur für sehr große Intervalle. Für T=4 war die hier angegebene Annäherung nicht vollständig zufriedenstellend. Eine lineare Gleichung brachte dort ähnlich gute Ergebnisse.

Da ich für ungerade T in 2.1.3 bereits gesagt hatte, dass die Auswahl an Zahlen, die für diese Teileranzahlen überhaupt in Frage kommen - also die Quadratzahlen – eine Häufigkeit von rund $\sqrt{n}$ haben, habe ich außerdem versucht aufgrund dieser Annahme eine Annäherungskurve für T=3 zu erstellen. Hierbei konnte ich folgende Kurvengleichung ermitteln, die sich sehr gut mit den gefundenen Werten deckt:

$$y=\frac{1{,}1*\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})}$$

Der Primzahlsatz scheint also sogar hier in einer geringfügig abgeänderten Form gültig zu sein.

3. Ausblick

Die hergeleiteten Summenformeln sind als Instrument für die Berechnung von Daten zu sehen. Dabei hat sich gezeigt, dass sich eine iterative Summenberechnung ausgezeichnet für die Berechnung dieser Daten eignet und vor allen Dingen ausreichend Freiheiten für über klassische Primzahluntersuchungen hinausgehende Berechnungen offen lässt. So konnte ich ohne größeren Mehraufwand eine Untersuchung mit von zwei abweichenden Teileranzahlen durchführen.

Die Auswertung der damit berechneten Daten brachte interessante Ergebnisse zu Tage. Die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Teileranzahlen lässt weitere Forschung zu. Der Erklärungsansatz für die Sonderstellung der Teileranzahl Vier als häufigste Teileranzahl im untersuchten Intervall bedarf weiterer Untersuchungen und Überlegungen. Eine empirische Überprüfung, ob die Teileranzahl Vier ihre Sonderstellung auch für weit größere Betrachtungsintervalle aufrecht erhalten kann, wäre ebenso angebracht wie ein mathematisch sauberer Beleg für deren relative Häufigkeit. Vermutlich ließen sich auch für die weiteren weniger auffälligen Teileranzahlen Regelmäßigkeiten und Systematiken ermitteln.

Die empirische Bestätigung des Primzahlsatzes in einer geringfügig abgeänderten Form für andere Teileranzahlen, insbesondere auch für ungerade, erscheint auf den ersten Blick überraschend. Eine mathematische Begründung dessen Gültigkeit für die weiteren Teileranzahlen sowie eine Herleitung der angepassten Varianten wäre der nächste Schritt.

Literaturliste

1. Günter Löh: „Wie Perlen auf der Schnur"; aus einem nicht weiter bekannten Magazin (Quelle liegt bei)
2. Harald Scheid: „Zahlentheorie"; dritte Auflage erschienen 2003 bei Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg
3. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: „Zahlentheorie"; Version vom 04.03.2006 (Quelle liegt bei)

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.